НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LIII, 3–4 (2008), 1–11

Др Даниел А. Романо

О МОТИВИМА ИЗУЧАВАЊА МАТЕМАТИЧКОГ МИШЉЕЊА

У оквиру курсева методике наставе математике (један двосеместрални курс – општа методика наставе математике и информатике, и четири једносеместрална курса из посебних методика – методика наставе алгебре, методика наставе анализе, методика наставе геометрије и методика наставе информатике) које студенти наставног смијера Одсјека за математику и информатику Универзитета у Бањој Луци слушају у старијим годинама (3. и 4. години студија), посебна пажња посвећује се темама из математичког мишљења. У овом чланку, се читалац подсјећа на један модел развоја креативног математичког мишљења. У том моделу се могу третирати процјене утицаја интивидуалне особености на установљавање постојања, еволуције и учинковитости математичког мишљења ученика старијих разреда опште средње школе и/или студената у прве двије године. Сем тога, изнесени су мотиви који би требало да снажно мотивишу занимање за ову проблематику.

1

У данашње вријеме, када се много говори о реформама општег средњег образовања, наравно да се поставља питање о циљевима математичког образовања у средњим школама: један од посебно истакнутих циљева тог образовања требало би да је развој математичког мишљења средњошколаца. Да би се узело учешћа у тим дискусијама требало би детерминисати окружење унутар којег желимо да прецизирамо термине и појмове. Сасвим је прихватљиво да психолози (и педагози) термином „мишљење“ не покривају исти појам (и/или исту групу појмова) као математичари. Али, у једном се слажу: мишљење је сложена и многострана психичка дјелатност. Ради илустрације, цитираћу неке ауторе:

– „Мишљење је трагање и откривање битно новога“ (А. В. Брушлинский);

– Леонтијев дефинише мишљење као виши степен знања;

– Галперин третира мишљење као форму оријентирано-истраживачке дјелатности;

Текст је замишљен као уводно предавање о математичком мишљењу унутар курса (Општа) методика наставе математике који слушају студенти четврте године Природно-математичког факултета у Бањој Луци.

– „Мишљење је посредовање засновано на разоткривању веза, релација и посредности и уопштено познавање објективне реалности“ (С. Л. Рубинштајн и Н. Б. Ширјајева).

У зависности од платформи посматрања мишљења, можемо говорити о једном или неком другом његовом виду испољавања. Ако се анализира карактер рјешавања задатака усмјерених ка пракси и/или теоријском познавању неких појава (и проблема) можемо говорити о теоријском и/или практичном мишљењу. По степену новитета, по карактеру резултата можемо сматрати да имамо посла са репродуктивним и/или продуктивним мишљењем. Ако вршимо класификацију по предметним садржајима, тада говоримо о математичком, поетском и/или социјалном мишљењу. По физиолошким специфичностима мозга: мишљење својствено десној полусфери мозга (емоционално и/или сликовито) мишљење, док мишљење својствено лијевој полусфери мозга третирамо као логичко мишљење.

Анализирајући појам мишљења (генерално као појам) природно се поставља питање о специфичностима мишљења особа у процесу едукације. Нас посебно интересује да ли постоје и шта су то особне карактеристике мишљења особа које се образују у процесу едукације (у даљем ћемо их означавати термином ученици/студенти) у специфичним условима математичког образовања. Прецизније, заинтересовани смо да снажније освијетлимо појам који се покрива термином „математичко мишљење“.

Дакле, у поступку анализирања и рјешавања математичких задатака (у оквирима неке математичке теорије) сигурно је да се одвија својствен и посебан мисаони процес са специфичним карактеристикама. Занима нас да ли постоје карактеристике тог мисаоног процеса које га знатно раздвајају од мисаоних процеса при ученичким активностима у другим школским предметима. Дакле, прво се поставља питање о постојању таквог психолошког феномена специфичног при мисаоним радњама у анализирању и рјешавању математичких специфичности, а друго, ако такав феномен постоји, покушати га детерминисати изучавајући његове специфичности а потом учинити напор ка формирању теорије којом би била покривана та специфичност. Значајан број математичара, који се баве овим појмом, износи тврдње да у психолошкој литератури нема једнозначног дефинисања поменутих појава те да је тај ентитет – математичко мишљење – недовољно изучен и да истраживање математичког мишљења јесте актуелни предмет савремене (математичке) науке.

Потреба за изучавањем ових посебности повезана је са нараслим потребама друштва које би ускоро требало да се ухвати у коштац са потребама савладавања проблема исказаних парадигмом савременог математичког образовања. Појам покривен термином „математичко мишљење“, у раније вријеме био је спорадично помињан у математичкој литератури: као примјери који потврђују овдје изнесено мишљење могу послужити радови Поенкареа „Математичко стварање“, Хелмхолца „Како долазе нове идеје“ или Шафаревичево „Математичко мишљење и природа“. Будући да су поменути аутори били значајни математичари, оправдано је претпоставити да је сваки од њих при изучавању поменутог питања унио знатан дио својих личних запажања како из властитог тако и из искуства колега математичара са којима су својевремено радили. Још је Раушенбах истицао да процес трагања за рјешењима логичких задатака при анализи и рјешавању математичких проблема снажно привлачи пажњу истраживача. Међутим, према мишљењу Ширјајеве, изучавање те психичке стране људске дјелатности још увијек је у стадију нагомилавања сазнања и уочених појава. Подсјетимо да је Поенкаре процјенио да је „генеза математичког стваралаштва проблем који изазива значајан интерес психолога“. Чини се да није јасно да ли, у тим процесима, човјечији ум имитира процесе окружујућег Свемира и/или обавља активности сам по себи и над самим собом. Зато, изучавајући процес математичког мишљења (са посебним освртима на већ разлучене посебности: алгебарско мишљење, геометријско мишљење, статистичко мишљење, ...) човјечанство се може надати да ће бар мало продубити неке битности у човјечијем сазнању.

2

У првој апроксимацији (дакле, доста непрецизно) може се казати да је математичко мишљење један од облика мишљења усмјерених ка рјешавању математичких проблема и задатака што се карактерише искориштавањем математичких симбола, појмова и правила. Мисаона дјелатност трансформише индивидуалну особеност ученика/студената и, наравно, заузима значајно мјесто у групи психолошких дјелатности у тој популацији. Когнитивне и психофизичке промјене код младих као и њихово усавршавање и проширивања треба изучавати у вези са математичким образовањем као окружењем. Сасвим оправдано је поставити питање: да ли постоје, и како то установити, посебне карактеристике мишљења које нам дају основу да се користимо синтагмом „математичко мишљење“? Да ли, будући да је општеприхваћено да постоји (врло сложени) ентитет „математичко мишљење“, постоје и неке специфичности тог мишљења које произлазе из особености математичке области која се изучава: да ли постоје посебности као што су, на примјер: алгебарско мишљење, геометријско мишљење, статистичко мишљење, и нека друга?

Окружење 1 (математичка анализа). Претпоставимо да смо у радној ситуацији када ученицима/студентима треба објаснити сличности и разлике између уређеног поља $(\mathbf{Q}, =, +, 0, \cdot, 1, \leqslant)$ рационалних бројева и уређеног поља $(\mathbf{R}, =, +, 0, \cdot, 1, \leqslant)$ реалних бројева. Како треба поступити да се планирани циљ – усвајање сложеног појма реалног броја као индивидуалности и скупа реалних бројева као колективитета – предаје тако да се код слушалаца обаве мисаоне радње које би требало да формирају знања о тим појмовима.

Како је то уобичајено у наставној пракси, почиње се да тврдњом о постојању ентитета као што је дијагонала квадрата чије су странице једнаке једној јединици. У ствари, изводи се доказ да корјен броја 2 није рационалан број. Дакле, ослањамо се на скупину знања о пољу рационалних бројева да бисмо доказали тврдњу $(\exists r)\neg(r \in \mathbf{Q})$. Будући да објект који егзистира мора негдје бити, а ако није у домену $\mathbf{Q}$, потпуно је прихватљиво постојање ентитета $\mathbf{Ir}$ – скупа који садржи такве објекте – скупа ирационалних бројева. Потом се објашњава специјално својство којим разликујемо скупове $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ ($= \mathbf{Q} \cup \mathbf{Ir}$, који називамо скуп реалних бројева): док у скупу $\mathbf{Q}$ постоје ограничени подскупови који немају супремум, за скуп $\mathbf{R}$ износимо тврдњу да сваки одозго ограничен подскуп мора у $\mathbf{R}$ имати супремум.

Претпоставимо сада да је појам уређеног поља реалних бројева прихваћен од слушалаца и да треба увести појам непрекидности функције $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ у тачки x на интервалу и/или сегменту. Сасвим оправдано је поставити питање шта се дешава у људском мозгу када види дефиницију:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0)(\forall t \in \operatorname{Dom} f)(|t - x| < \delta \ \Rightarrow\ |f(t) - f(x)| < \varepsilon)\ ?$$

Окружење 2 (Еуклидова геометрија). Уз претпоставку да су слушаоци прихватили априорне тврдње о појмовима „тачка“, „права“, „раван“, „инцидентно“, „између“ и да приступамо увођењу последње аксиоме − аксиоме о паралелним правим, „За дату тачку A и дату праву p у равни α постоји једна и само једна права q у тој равни, инцидентна са датом тачком A а која нема заједничких тачака са датом правом p (тј. паралелна је са њом)“, сасвим оправдано је поставити питање о ваљаности последње аксиоме: да ли је то логичка истина или није? Да ли та тврдња покрива неку реалност Свемира или не? Шта се дешава у мозгу средњошколца/студента када добије информацију да се претходна тврдња прихвата без доказа и да, строго говорећи, чак и њена негација није логички противрјечна са претходно изнесеним аксиомама Еуклидове геометрије?

Окружење 3 (Алгебра). Како старији ученици/млађи студенти схватају појмове основних алгебарских структура као што су „групоид“, „моноид“, „полугрупа“ и томе слично? Шта за њих значи дефиниција унутрашње бинарне операције исказане на сљедећи начин: „Унутрашња бинарна операција на скупу S је тотална функција $w\colon S \times S \to S$“? Како прихватају сљедеће дефиниције:

(1) *Групоид* (S, w) је уређени пар непразног скупа S и унутрашње бинарне операције w;

(2) Операција w на S је *асоцијативна* ако и само ако је сљедећа формула ваљана $(\forall x, y, z \in S)(w(x, w(y, z)) = w(w(x, y), z))$; и

(3) За асоцијативан групоид кажемо да је *полугрупа*?

Окружење 4 (математичка логика). Сада ако, за било који фиксирани језик првог реда, желимо да формирамо листу логичких аксиома и правила извођења, можемо се послужити текстом овог аутора „Шта је математичка логика“, Зборник природно-математичких наука, ЈУКЗ, Бања Лука, V (8–9) 2005, 35–74.

У схемама L1–L11 B, C и D су формуле.

„Дефиниција“ везе импликација:

L1: $B \ \Rightarrow\ (C \ \Rightarrow\ B)$ (шта ово значи?);

L2: $(B \ \Rightarrow\ (C \ \Rightarrow\ D)) \ \Rightarrow\ ((B \ \Rightarrow\ C) \ \Rightarrow\ (B \ \Rightarrow\ D))$ (шта ово значи?).

„Дефиниција“ $\wedge$-веза:

L3: $B \wedge C \ \Rightarrow\ B$ (шта ово значи?);

L4: $B \wedge C \ \Rightarrow\ C$ (шта ово значи?);

L5: $B \Rightarrow (C \Rightarrow B \wedge C)$ (шта ово значи?).

„Дефиниција“ (нон-ексклузивне) дисјункције ($\vee$-везе):

L6: $B \Rightarrow B \vee C$ (шта ово значи?);

L7: $C \Rightarrow B \vee C$ (шта ово значи?);

L8: $(B \Rightarrow D) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow (B \vee C \Rightarrow D))$ (шта ово значи?).

„Дефиниција“ $\neg$-везе:

L9: $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg B)$ (шта ово значи?);

L10: $\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ (шта ово значи?).

Закон искључења трећег (Tertium non datur):

L11: $B \vee \neg B$ (шта ово значи?).

Горњих 11 схема (плус Modus Ponens као правило извођења) представља Класичну логику пропозиција.

У сљедећим схемама L12, L13, F је по вољи узета формула, t је терм такав да је замјена $F(x/t)$ допустива:

L12: $(\forall x)F(x) \Rightarrow F(t)$ (специјално: $(\forall x)F(x) \Rightarrow F(x)$, шта ово значи?),

L13: $F(t) \Rightarrow (\exists x)F(x)$ (посебно: $F(x) \Rightarrow (\exists x)F(x)$, шта ово значи?).

У сљедећим схемама L14, L15, F је по вољи узета формула, а G је формула у којој нема слободних појављивања варијабле x:

L14: $(\forall x)(G \Rightarrow F(x)) \Rightarrow (G \Rightarrow (\forall x)F(x))$ (шта ово значи?);

L15: $(\forall x)(F(x) \Rightarrow G) \Rightarrow ((\exists x)F(x) \Rightarrow G)$ (шта ово значи?).

У сљедећим правилима закључивања, B, C и F су формуле.

Modus Ponens (MP): $B \Rightarrow C, B \vdash C$ (шта ово значи?);

Generalizacija (Gen): $F(x) \vdash (\forall x)F(x)$ (шта ово значи?).

Ова листа аксиома и правила закључивања представља тзв. Класичну предикатску логику. Да ли се, читајући ове аксиоме, и како формира код слушалаца знање повезано са овим аксиоматским системом?

3

Прихватање тврдњи америчког неуролога Сперија (из 1981. године) о асиметрији људског мозга снажно је утицало на математичко образовање. Математичка едукација мора у складу са претходним искориштавати резултате тог истраживања. А. Г. Мордкович је, у том циљу, формулисао два слогана: „Мање сколастике, мање формализација, мање егзактних модела, мање ослањања на лијеву полусферу мозга[1]. Више геометријских илустрација, више апроксимација, више плаузибилних разматрања, више 'меких' модела и више ослањања на десну страну мозга!“ Дакле, поставља се питање како избалансирати математичко образовање тако да се оно равномјерно ослања на способности обје стране мозга.

[1] Доказано је да је лијева страна мозга задужена за вербално-симболичке функције, док је десна страна специјализована за просторно-синтетичке операције.

Чак се почео појављивати и термин „визуелно мишљење“, тј. мишљење које се остварује посредством визуелних операција[2].

Савремена психолошко-педагошка истраживања проблеме формирања и развоја визуелног мишљења ученика/студената концентришу око сљедећих питања: операције и закономјерности невербалног мишљења, проблеми визуелних перцепција, механизми и карактеристичне особености визуелног мишљења, динамика формирања математичких одраза, проблеми везани за преношење информација и препознавањем сигнала и слика, психофизиолошки механизми опажања доминантних и субдоминантних појава у лијевој страни мозга и томе слично.

4

Размотримо особености развоја мишљења код ученика старијих разреда општеобразовне средње школе и/или млађих студената.

У њиховим узрастима бурно се развија процес спознајног развоја. Они могу логички мислити, тј. могу се занимати теоријским разматрањима. Важна специфичност њиховог узраста је способност баратања хипотезама. Већ у старијим разредима средње школе ученици су способни да усвајају научне појмове, да овладавају способнистима искориштавања тих наукпљених знања у проступку рјешавања чак и захтјевних задатака. Њихов узраст је способан схватати логичке изјаве, овладати технологијама доказа чак и схватати неопходности постојања система доказа. У складу са снажењем когнитивних способности и непрекидним профилирањем когнитивних равни, прихватајући и овладавајући умјећима самоконтроле и саморегулације, они су у стању да прихватају посебности другачијег мишљења али и да праве екстензије тих „туђих“ ставова. Није риједак случај да особе у тим узрастима, постајући свјесни сами себе у потпуности, могу да мисаоно формирају ставове те да их језички добро искажу. Јасно је да самосвјест о својственој посебности ученика/студента налази свој израз у способности мјењања мотивација основних облика дјелатности. Посебно, опште је прихваћено да су на интересној и интелектуално-изазовној равни и/или у таквим дјелатностима, ученици/студенти у могућности да постигну високу концентрацију, чак и у случајевима присуства дуготрајних дигресија у тим активностима.

Материја која се у тим узрастима изучава, у начелу, отвара могућност (само)доказивања себи и другима да су у могућности да сложен материјал на вишој логичкој равни прихвате те да изграђују конструкције којима провјеравају своје и/или туђе хипотезе. У могућности су да не само формирају своје хипотезе, већ више алтернативних система, те да их како међусобно тако и са другим концепцијама упоређују, што им омогућава прихватање и разумјевање ваљаности више логичких могућности при рјешавању проблема и/или задатака.

Доступна литература из психологије дозвољава формирање улазних ставова о (математичком) мишљењу ученика/студената:

[2] Зинченко и Вергилес дефинишу визуелно мишљење као људску дјелатност чији су продукти генерисање нових образаца, изградња нових визуелних форми које носе смисаоне садржаје и чине знање видљивим

- ученик/студент размишља у категоријама појмова;
- присутна је способност теоријског мишљења;
- присутна је способност прихватања па чак и развијања туђих мишљења уз могућност њиховог компарирања;
- ученик/студент је способан да размишља о својим мисаоним процесима;
- сматра се да постоје наговјештаји о присутности способности прихватања како туђег тако и свог мишљења као сазнајне категорије (без вањске принуде);
- код њиховог размишљања значајну улогу игра мотивација;
- сматра се да код њих постоји способност формирања стилова мишљења;
- прихвата се тврђење да су ученици/студенти способни да процјењују туђу успјешност (а понекад и своју) уз увиђање пропуста и/или грешака које при томе праве.

Замислимо, ради илустрације, сљедећу радну ситуацију. Унутар курса (опште) алгебре обрађују се појмови „релација еквиваленције", „релација конгруенције", „уређење" и „квази-уређење", дефинисани на сљедећи начин:

(4) За релацију $\rho \subseteq S \times S$ кажемо да је *релација еквиваленције* на скупу S ако и само ако вриједи:

$$= \subseteq \rho, \quad \rho \subseteq \rho^{-1}, \quad \rho \circ \rho \subseteq \rho.$$

(5) Релација еквиваленције ρ на полугрупи $(S,\cdot)$ је *релација конгруенције* ако и само ако вриједи:

$$(\forall a,b,x \in S)((a,b) \in \rho \;\Rightarrow\; (ax,bx) \in \rho) \wedge ((a,b) \in \rho \;\Rightarrow\; (xa,xb) \in \rho)).$$

(6) За релацију σ на полугрупи $(S,\cdot)$ кажемо да је *квази-уређење* на $(S,\cdot)$ ако и само ако вриједи

$$=\subseteq \sigma, \quad \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma \quad \text{и}$$
$$(\forall a,b,x \in S)((a,b) \in \sigma \;\Rightarrow\; (ax,bx) \in \sigma) \wedge ((a,b) \in \sigma \;\Rightarrow\; (xa,xb) \in \sigma)).$$

За квази-уређење σ кажемо да је *уређење* ако је антисиметрично, тј. ако вриједи $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq =$.

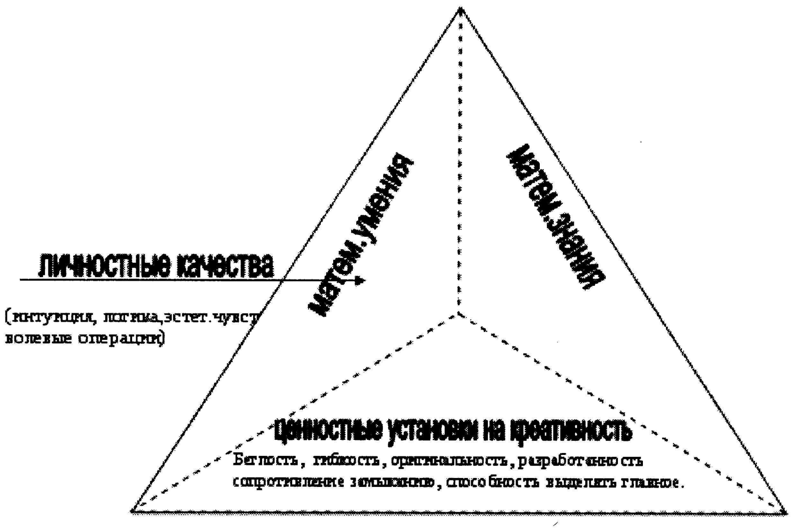
Сасвим оправдано је поставити питања о прихватању/разумјевању сљедећих тврдњи:

Тврдња 1. Ако је релација σ квази-уређења на полугрупи $(S,\cdot)$, тада је $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$ релација конгруенције на $(S,\cdot)$.

Тврдња 2. Да би релација θ била релација уређења компатибилна са опарацијом '$*$' на фактор-полугрупи $(S/\rho,*)$ потребно је и довољно да на полугрупи $(S,\cdot)$ постоји квази-уређење σ такво да је $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$.

Које психолошке активности се манифестују при анализирању претходно изнесених тврдњи? Какве процедуре размишљања се у таквим случајевима обављају? Које истине се износе у претходним тврдњама?

Постоји могућност да се о мишљењу ученика/студената изражавамо као о посредном и уопштеном сазнавању објективне реалности укомпоновањем тог сазнања како у његов психолошки живот тако и у његову специфичну особеност у том узрасту. Оно је као и поменути процеси, по мишљењу значајног броја истраживача математичког мишљења, одређено особеним карактеристикама сваког појединог ученика/студента. Сљедећа илустрација, преузета из литературе (из дисертације Н. В. Ширјајеве), требало би да представља визуализацију поменутих односа.



Као модел процеса детерминације математичког мишљења изабран је правилни тетраедар. Тај модел је, наравно, условран, и само демонстрира наше виђење развоја математичког мишљења као резултат међудјеловања различитих међусобно комплементарних компонената. Требало би да овај модел сугерише тип конекција између изучаваних објеката, њихову просторно-временске компратибилност са елементима средине у којој се посматра, као и развој њихових функционалних својстава и процеса.

Детерминантне особености личности које, сматра се, значајно утичу на процес развоја математичког мишљења код индивидуе су личне особености као што су интуиција, логика, осјећај за естетику, самоконтрола, способност критичке анализе, и, што треба посебно истаћи, изграђен став о уважавању способности изградње конструкција. На то се, у неком смислу, односе математичка знања и вјештине при чему се појављују такви психички процеси као што су памћење, имагинација, пажња. Не ријетко се тврди да су за психодијагностику математичког мишљења значајни Торенсков тест[3], ТИПС-тест, експертска процјена као и садржајна анализа писмених радова ученика/студената.

[3] У психолошкој пракси Торенсков тест се прихвата као валидни стандардизовани инструмент који омогућава процјењивање значајног броја карактеристика креативног мишљења као и процјену градитељских способности личности.

5

У Хилбертовом чланку „Аксиоматско мишљење“ анализира се аксиоматски метод истраживања, који, по његовом мишљењу, јесте врло значајан метод у математици. Сакупивши факте неке области знања можемо их, међусобно компарирајући, организовати као уређени домен тог знања. Тај уређени скуп, наравно, формира окосницу-костур (или, прецизније, уређени граф) појмова те домене знања. Јасно је да унутрашњи односи у том графу морају дозвољавати како интерполације тако и екстраполације костура а да се при томе мора сачувати (или чак и профинити) уређеност у тој конструкцији. Дакле, уређени скуп таквих ентитета нам омогућава да се за сваки објекат тог домена знања у графу може наћи појам (или група појмова) који му одговарају, док се за сваки факт о објектима те области знања у изграђеној окосници-костуру може наћи логична веза међу појмовима.

Дакле, на специфичан начин, геометријски факти сачињавају геометрију, аритметички – теорију бројева, и даље у том смислу. У основи тог уређеног графа леже основни појмови и основне тврдње (аксиоме) које дају логичке везе међу основним појмовима. Наравно да се подразумјева да постоје правила како се изграђује тај костур (која називамо правилима извођења) које можемо примјењивати у даљој изградњи тог уређеног домена знања. Даљи развој дате области знања добија се посредством нових логичких конструкција (екстраполација графа) од већ изграђених подграфова; употпуњавањем веза унутар већ изграђених чворова и линија у уређеном графу (интерполација); проналажењем нових (логичких) веза између терма већ изграђеног графа знања и њихово прецизирање у категоријама те области; проналажењем и описивањем могућности повезивања раније изграђених дијелова окоснице-костура овог домена за које до тада нисмо уочавали те везе; разматрањем окружења у којем се тај домен знања третира; разматрањем датог домена знања промјеном окружења и/или успостављање веза проширењем окружења; … Таква теорија мора удовољавати сљедећим захтјевима: прво, мора се моћи просуђивати о зависности и/или независности аксиома, и друго, мора се гарантовати непротиврјечност скупа аксиома.

Као један примјер система првог реда може послужити Пеанова аритметика првог реда. Језик првог реда система S је детерминисан на сљедећи начин:

1. Постоји само једна константа '0'.
2. Постоје три функцијска слова, f^1, f_1^2, f_2^2, али умјесто да пишемо $f^1(\tau)$ писаћемо τ', умјесто да пишемо $f_1^2(\tau,\mu)$ писаћемо $(\tau+\mu)$, и умјесто да пишемо $f_2^2(\tau,\mu)$ писаћемо $(\tau\cdot\mu)$.
3. Постоји само један предикатски симбол A_1^2, али умјесто да пишемо $A_1^2(\tau,\mu)$ писаћемо $\tau=\mu$.

Прави или нелогички аксиоми система S су:

$S1$. $(\forall x)(x=x)$

$S2$. $(\forall x)(\forall y)(x=y \ \Rightarrow\ y=x)$

$S3$. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x=y\wedge y=z \ \Rightarrow\ x=z)$

$S4.$ $(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow x' = y')$

$S5.$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)((x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \Rightarrow (x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) \wedge (x_1 \cdot y_1) = (x_2 \cdot y_2))$

$S6.$ $(\forall x)(x' \neq 0)$

$S7.$ $(\forall x)(\forall y)(x' = y' \Rightarrow x = y)$

$S8.$ $(\forall x)((x + 0) = x)$

$S9.$ $(\forall x)(\forall y)((x + y') = (x + y)')$

$S10.$ $(\forall x)((x \cdot 0) = 0)$

$S11.$ $(\forall x)(\forall y)((x \cdot y') = ((x \cdot y) + x))$

$S12.$ $(\alpha(0) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$.

Напоменимо да будући да је $S12$ схема-аксиом (није један аксиом), то систем S има бесконачно много правих аксиома. Интерпретација за S којој тежимо, названа стандардном интерпретацијом, јесте сљедећа:

1. Домен квантификација D је скуп природних бројева $\{0, 1, 2, \dots\}$.

2. Константу '0' узимамо за нулу.

3. Екстензија за '=' је релација идентитета међу природним бројевима.

4. Функције означене са '′', '+' и '·' су респективно придружене функцијама сукцесор, адиција и мултипликација.

Проблематика математичких способности у психологији представља широко поље за истраживаче. Због значајних неусклађености међу различитим тенденцијама у психологији а такође и унутар тих тенденција још увијек не може бити ријечи о егзактном и строгом поимању садржаја ових појмова. Разматрања многих аутора на тему математичке спосбности/математичко мишљење недвојбено указују на значајну недовршеност формирања опште теорије о овим појавама везаним за математичко образовање. Истовремено, сва та истраживања снажно сугеришу о постојању високе заинтересованости научне заједнице ка разумјевању психолошких особености при учењу/подучавању математике и активности у тим областима.

Практични значај таквих истраживања је очигледан. Будући да математичко образовање игра једну од значајнијих улога у општеобразовном систему, активности друштвене заједнице усмјерене у побољшању тог образовања кроз примјену ефективнијих технологија заснованих на савременим истраживањима математичког мишљења наравно да су од интереса и за друштво и за сваког појединог реализатора наставе математике на било којем нивоу.

На крају подсјетимо читаоца о постојању асоцијације The International Group for the Psychology of Mathematics Education формиране 1976. године на конференцији The Third International Congress on Mathematical Education (ICME-3) у Карлсруеу (Немачка), у сарадњи са The International Commission for Mathematical Instruction (ICMI). Главни циљеви ове асоцијације су:

– промоција међународних контаката и размјена научних информација о резултатима истраживања о психологији математичког образовања;

– промоција и подстицај интердисциплинарних истраживања у додирним областима кроз сарадња психолога, математичара и наставника математике;

– дубље и боље разумјевање психолошких аспеката учења и подучавања математике као и импликације тих аспеката.

Сем тога, подсјећамо читаоца да су активности Циљних група 5, 6 и 7 унутар активности асоцијације ERME (European Assiciation for Research in Mathematics Education), посвећене математичком мишљењу и учењу као когнитивном процесу.

Ове последње напомене о активностима асоцијација PME и ERME сугеришу постојању значајних извора научних истраживања о особеностима математичког (па тако и алгебарског, геометријског, стохастичког, ...) мишљења.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Arcavi, L. Bazzini, C. Sackur, P. Tsamir, *Algebraic Thinking*, CERME 3, TG6, 1–5.
2. R. Arnheim, Visual thinking, Berkley, Univ. of California Press, 1969.
3. C. Batanero, *Stochastic Thinking*, CERME 3, TG5, 1–2.
4. T. P. Carpenter, M. L. Franke and L. Levi,*Thinking Mathematically*, Heinemann, 2003.
5. В. А. Далингер, *Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучений математики*, Учебное пособие, Омск, Изд-во ОмГПУ, 1999.
6. В. А. Далингер, *Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математики*, Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета», Выпуск 2006, чланак 151.
7. J.-L. Dorier, Á. Gutiérrez, R. Strässer, *Geometrical Thinking*, CERME 3, TG7, 1–10.
8. J. Goodell, *Learning to Teach Mathematics for Understanding: The Role of Reflection*, Mathematics Teacher Education and Development 2000, Vol. 2, 48–60.
9. S. Kriegler, *What is Algebraic Thinking?*, Kriegler's Homepage.
10. P. White, M. Mitchelmore, N. Branca, M. Maxon, *Professional Development: Mathematical Content versus Pedagogy*, Mathematics Teacher Education and Development 2004, Vol. 6, 41–51.

Природно-математички факултет Бања Лука, 78000 Бања Лука, Српска, БиХ, Младена Стојановића 2

E-mail: bato49@hotmail.com